Элементы теории

векторного поля

А.Л. Белкова, А.А. Кононова

Оглавление

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1 Пространственные кривые.

1.1.1 Кривая и ее параметризации

Определение 1 *Рассмотрим вектор-функцию скалярного аргумента*

$$\mathbf{r} : [a, b] \to R^3.$$

Предположим, что отображение $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ *является гладким, то есть все координатные функции* $x(t), y(t), z(t)$ *имеют непрерывные производные. Кроме того, будем предполагать, что* $\mathbf{r}'(t) \neq 0 \ \ \forall t \in (a, b)$.

Множество

$$\Gamma := \{\mathbf{r}(t), \ t \in [a, b]\},$$

являющееся образом отрезка $[a, b]$ *под действием отображения* $\mathbf{r}$*, будем называть* **гладкой кривой***, а само отображение* $\mathbf{r}$ — **параметризацией** *кривой* Γ.

П р и м е р

Рассмотрим вектор-функцию скалярного аргумента

$$\mathbf{r}(t) := (\cos t; \sin t; 0), \ t \in [0, 2\pi].$$

При изменении t от значения 0 до значения 2π точка $\mathbf{r}(t)$ описывает единичную окружность $\mathbb{T}$, лежащую в плоскости $z = 0$.

Рассмотрим другое отображение

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) := (\cos(2t); \sin(2t); 0),\ t \in [0, \pi]$$

имеет такой же образ, т.е. оно задает ту же самую окружность $\mathbb{T}$. Если интерпретировать параметр t как время, то разница между параметризациями $\mathbf{r}$ и $\tilde{\mathbf{r}}$ заключается в том, что мы проходим один и тот же маршрут с разными скоростями (во втором случае в два раза быстрее).

Две параметризации

$$\mathbf{r} : [a, b] \to R^3$$

и

$$\tilde{\mathbf{r}} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to R^3$$

задают одну и ту же кривую тогда и только тогда, когда существует возрастающая функция

$$\phi : [a, b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$$

такая, что

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(\phi(t)),\ \forall t \in [a, b].$$

1.1.2 Натуральная параметризация кривой

Пусть дана кривая Γ и $\mathbf{r}(t)$ — некоторая ее параметризация. Как известно из курса высшей математики, длину дуги кривой, пройденной за время t, можно выразить следующим образом:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \int_a^t |\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Из свойств интеграла следует, что $s(t)$ является возрастающей функцией. Следовательно, можно задать параметризацию кривой Γ с помощью параметра $s = s(t)$.

Определение 2 Натуральная параметризация — *параметризация кривой с помощью длины дуги.*

В случае натуральной параметризации мы всегда будем обозначать параметр буквой s. Этот параметр тоже называется **натуральным**. Производные вектор-функции $\mathbf{r}$ по натуральному параметру будем обозначать символами $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$, а обозначения $\mathbf{r}', \mathbf{r}''$ оставим для производной по произвольному аргументу.

Установим связь между $\dot{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{r}'$:

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \cdot |\mathbf{r}'|.$$

В частности, при $t = s$ получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot |\dot{\mathbf{r}}|$$

и, следовательно,
$$|\dot{\mathbf{r}}| = 1.$$

Таким образом, мы получили удобную **физическую интерпретацию натуральной параметризации**: *она соответствует обходу кривой со скоростью, равной по модулю единице.*

П р и м е р

Рассмотрим с радиусом R, заданную в параметрическом виде
$$\mathbf{r} = (R\cdot\cos(2\pi t^3), R\cdot\sin(2\pi t^3)),\ t\in[0,1).$$

Перейдем к натуральной параметризации. Для этого вычислим модуль производной вектора $\mathbf{r}$:
$$\mathbf{r}' = (-6R\pi t^2\cdot\sin(2\pi t^3)), 6R\pi t^2\cdot\cos(2\pi t^3)),$$
$$|\mathbf{r}'| = 6R\pi t^2.$$

Следовательно,
$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'|du = \int_0^t 6R\pi u^2 du = 2\pi t^3.$$

Таким образом, натуральная параметризация окружности имеет вид
$$\mathbf{r}(s) = (R\cdot\cos s, R\cdot\sin s),\ s\in[0,2\pi).$$

1.1.3 Кривизна. Радиус кривизны

В предыдущем пункте мы выяснили, что производная по натуральному параметру имеет единичную длину. Введем обозначение для получившегося *единичного касательного вектора*:
$$\tau^0 := \dot{\mathbf{r}}.$$

Так как $|\tau^0| = 1$, то $(\tau^0)^2 = 1$. Продифференцируем это равенство по натуральному парметру:
$$2\tau^0\cdot\frac{d\tau^0}{ds} = 0.$$

Следовательно, векторы τ^0 и $\dfrac{d\tau^0}{ds} = \ddot{\mathbf{r}}$ ортогональны.

Определение 3 *Длина вектора* $\dfrac{d\tau^0}{ds}$ *называется* **кривизной** *кривой в точке и обозначается через* K*:*
$$K := \left|\frac{d\tau^0}{ds}\right| = |\ddot{\mathbf{r}}|.$$

Величина, обратная кривизне кривой в некоторой точке, называется **радиусом кривизны** *кривой в этой точке:*
$$R := \frac{1}{K}.$$

Формула для вычисления кривизны, заданной в параметрическом виде

В определении кривизны кривой в точке участвует вторая производная по натуральному параметру. Такую формулу не всегда удобно использовать в вычислительных целях. Приведенная ниже формула позволяет вычислить кривизну при произвольной параметризации:

$$K = \frac{|\mathbf{r'} \times \mathbf{r''}|}{|\mathbf{r'}|^{\mathbf{3}}}.$$

Пример

Найдем радиус кривизны винтовой линии

$$\mathbf{r} = (a\cos t, a\sin t, t), t \in [0, 2\pi).$$

Находим первую и вторую производные:

$$\mathbf{r}' = (-a\sin t, a\cos t, 1),$$

$$\mathbf{r}'' = (-a\cos t, -a\sin t, 0),$$

вычисляем векторное произведение

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & 1 \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = a\sin t\mathbf{i} - a\cos t\mathbf{j} + a^2\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{\mathbf{a^2+1}},$$

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \mathbf{a}\sqrt{\mathbf{a^2+1}},$$

подставляем в формулу для кривизны:

$$K = \frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}^3} = \frac{a}{a^2+1},$$

таким образом, радиус кривизны равен

$$R = \frac{a^2+1}{a}.$$

1.1.4 Основной трехгранник

Определение 4 *Рассмотрим кривую, заданную уравнением*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Вектор $\tau^0 = \dot{\mathbf{r}}$ *является единичным касательным вектором. Рассмотрим вектор*

$$\mathbf{n}^0 := \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{K}.$$

Это единичный вектор, ортогональный касательному вектору, называется **нормалью** *к кривой в данной точке.* **Бинормалью** *называется вектор* $\mathbf{b}^0$*:*

$$\mathbf{b}^0 := \tau^0 \times \mathbf{n}^0.$$

Ортонормированная тройка векторов $\tau^0,\ \mathbf{n}^0,\ \mathbf{b}^0$ *называется* **основным трехгранником** *или* **трехгранником Френе**.

Определение 5 *Величина*

$$\frac{1}{T} := |\dot{\mathbf{b}}^0|$$

называется **кручением** *кривой, а величина* T *— радиусом кручения.*

Формула для вычисления кручения кривой

$$\frac{1}{T} = R^2(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^{\mathbf{2}}}.$$

Формулы Френе.

Формулы, выражающие производные векторов $\tau^0,\ \mathbf{n}^0,\ \mathbf{b}^0$, называются формулами Френе:

$$\dot{\tau}^0 = \frac{1}{R}\mathbf{n}^0;$$

$$\dot{\mathbf{b}}^0 = \frac{1}{T}\mathbf{n}^0;$$

$$\dot{\mathbf{n}}^0 = -\frac{1}{R}\tau^0 - \frac{1}{T}\mathbf{b}^0.$$

1.2 Криволинейные интегралы.

1.2.1 Криволинейные интегралы первого рода.

Пусть кривая γ задана в параметрическом виде

$$\gamma:\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ t \in [a, b].$$

Определение 6 **Интегралом первого рода** *функции* $f(M),\ M \in \gamma$, *называется выражение*

$$\int_\gamma f(M)ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Выражение ds, стоящее в левой части, называется **дифференциалом длины дуги** . Оно является дифференциалом натурального параметра $s = \int_a^t |\mathbf{r}'(t)|dt$, следовательно

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt,$$

как дифференциал интеграла с переменным верхним пределом.

Интеграл первого рода не зависит ни от параметризации кривой, ни от направления обхода кривой γ.

Физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Если рассматривать подынтегральную функцию $f(M)$ как линейную плотность проволоки, имеющей форму кривой γ, то масса этой проволоки будет равна криволинейному интегралу

$$m = \int_\gamma f(M)ds.$$

Многие физические величины (например, координаты центра тяжести проволоки, моменты инерции относительно оси и пр.) выражаются через криволинейный интеграл первого рода.

П р и м е р

Пусть γ — первый виток спирали (мы используем задание в декартовой системе координат):

$$\gamma:\ \mathbf{r} = (3\cos t, 3\sin t, 4t),\ t \in [0, 2\pi];$$

Найдем интерграл функции

$$f(x, y, z) := x + 3y + z^3$$

вдоль кривой γ.

Найдем дифференциал длины дуги.

$$\mathbf{r}'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 4);$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 5;$$

$$ds = 5dt.$$

Вычисление интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла:

$$\int_\gamma f(M)ds = \int_0^{2\pi} \big(x(t) + 3y(t) + z^3(t)\big) \cdot 5dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(3\cos(t) + 9\sin(t) + 64t^3(t)\big) \cdot 5dt = 80.$$

1.2.2 Криволинейные интегралы второго рода.

Пусть кривая γ задана в параметрическом виде

$$\gamma: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \ t \in [a, b].$$

Определение 7 **Интегралом второго рода** *вектор-функции* $\mathbf{F}(M)$, $M \in \gamma$, *называется выражение*

$$\int_\gamma \mathbf{F}(M)d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt.$$

В правой части равенства под интегралом стоит скалярное произведение векторов. Если вектор-функция $\mathbf{F}$ задана в декартовой системе координат $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r}))$, то

$$\int_\gamma \mathbf{F}(M)d\mathbf{r} := \int_a^b \big(P(\mathbf{r}(t))x'(t) + Q(\mathbf{r}(t))y'(t) + R(\mathbf{r}(t))z'(t)\big)dt.$$

Связь криволинейного интеграла второго рода с криволинейным интегралом первого рода можно выразить следующим образом:

$$\int_\gamma \mathbf{F}(M)d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}\, ds.$$

Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления обхода кривой и меняет знак при смене направления.

Физический смысл криволинейного интеграла второго рода.

Если вектор $\mathbf{F}$ выражает переменную силу, то криволинейный интеграл второго рода $\int_\gamma \mathbf{F}(M)d\mathbf{r}$ равен работе этой силы по перемещению материальной точки вдоль кривой γ.

П р и м е р

Пусть, как и в предыдущем примере, γ — первый виток спирали:

$$\gamma: \ \mathbf{r} = (3\cos t, 3\sin t, 4t), \ t \in [0, 2\pi];$$

Найдем интерграл вектор-функции

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (y, z, x)$$

вдоль кривой γ.

$$\int_\gamma \mathbf{F}(M) d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (3\sin t \cdot (3\cos t)' + 4t \cdot (3\sin t)' + 3\cos t \cdot (4t)') dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-9\sin^2 t + 12t\cos t + 12\cos t) dt = -9\pi.$$

1.3 Поверхность.

1.3.1 Способы задания поверхности

Следующее базовое понятие, которое понадобится нам при изучении векторных и скалярных полей — понятие поверхности в трехмерном пространстве.

Определение 8 *Поверхность, заданная неявно — множество точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению вида*

$$F(x, y, z) = 0.$$

П р и м е р ы

1) Уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

задает сферу с центром в начале координат и радиусом 1.

2) Уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

задает единственную точку — начало координат.

Этот пример показывает, что для того, чтобы полученное множество было "похоже" на поверхность в обычном понимании этого слова, на функцию $F(x, y, z)$ необходимо наложить некоторые дополнительные условия.

3) Уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

задает (бесконечный круговой) цилиндр с образующей, параллельной оси Oz.

Определение 9 *Поверхность, заданная параметрически — множество точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений*

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v),$$

$$z = z(u, v),$$

или, кратко,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$

где переменные (u, v) заданы в некоторой плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Переменные u и v называются **параметрами** поверхности и служат двумерными криволинейными координатами (*внутренними координатами*) на поверхности: если мы знаем, что точка M лежит на поверхности, заданной параметрически, то для описания ее положения во всем трехмерном пространстве достаточно указать значения двух параметров u и v.

П р и м е р ы

1) Параметрические уравнения сферы с центром в начале координат и радиусом 1:

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = & \cos\varphi\sin\theta \\ y(\varphi,\theta) = & \sin\varphi\sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = & \cos\theta \end{cases}$$

Параметрами служат переменные $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\theta \in [0, \pi]$.

2) Параметрические уравнения цилиндра

$$\begin{cases} x(\varphi,z) = & \cos\varphi \\ y(\varphi,z) = & \sin\varphi \\ z(\varphi,z) = & z \end{cases}$$

Параметрами служат переменные $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $z \in \mathbb{R}$.

3) Параметрические уравнения тора

$$\begin{cases} x(\varphi,\psi) = & (R + r\cos\varphi)\cos\psi \\ y(\varphi,\psi) = & (R + r\cos\varphi)\sin\psi \qquad \varphi, \in [0; 2\pi), \psi \in [-\pi; \pi) \\ z(\varphi,\psi) = & r\sin\varphi \end{cases}$$

Определение 10 *Задание поверхности уравнением*

$$z = f(x, y)$$

(или $x = f(y, z)$, или $y = f(z, y)$) называется **явным**.

Явный способ задания поверхности с одной стороны является самым простым, с другой — самым "бедным" в том смысле, что этим способом можно описать не так много поверхностей. Например, ни одна из поверхностей, приведенных в примерах к параметрическому заданию, не описывается явным уравнением (но может быть представлена в виде объединения нескольких явно заданных поверхностей).

В дальнейшем мы будем, в основном, пользоваться параметрическим способом задания поверхности.

Определение 11 *Поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется* **гладкой**, *если выполняются следующие условия:*

- *функции $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ непрерывно дифференцируемы;*
- *отображение $\mathbf{r}(u, v)$ задает взаимно-однозначное соответствие между точками поверхности и точками области параметров Ω;*
- *векторное произведение векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ не равно нулю:*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0.$$

1.3.2 Касательная плоскость и нормаль

Определение 12 *Пусть задана гладкая поверхность* Γ*, зафиксируем на ней точку* $M \in \Gamma$*. Рассмотрим множество гладких кривых, лежащих на поверхности* Γ*. Прямые, касательные к этим кривым в точке* M*, образуют плоскость. Эта плоскость называется* **касательной плоскостью** *к поверхности* Γ *в точке* M*.*

Вектор нормали к касательной плоскости называется **нормалью** *к поверхности* Γ *в точке* M*.*

Случай поверхности заданной неявно

Если поверхность Γ задана неявно уравнением

$$F(x,y,z) = 0$$

и точка $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma$, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0.$$

Вектор нормали

$$\mathbf{n} = (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)).$$

Случай поверхности заданной параметрически

Пусть поверхность Γ задана неявно уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Рассмотрим вектора $\mathbf{r}'_u(M_0)$ и $\mathbf{r}'_v(M_0)$. Эти вектора лежат в касательной плоскости к поверхности Γ.

В качестве вектора нормали мы можем взять их векторное произведение:

$$\mathbf{n} := \mathbf{r}'_u(M_0) \times \mathbf{r}'_v(M_0).$$

Уравнение касательной плоскости можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

Случай явно заданной поверхности

Пусть поверхность задана уравнением

$$z = f(x,y).$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z = z_0 + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

координаты вектора нормали

$$\mathbf{n} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1).$$

1.3.3 Односторонние и двусторонние поверхности.

Рассмотрим гладкую поверхность Γ. Проведем единичную нормаль к этой поверхности в произвольной точке M_0. Рассмотрим на поверхности замкнутую кривую γ, начало и конец которой находятся в точке M_0. Переместим вектор нормали вдоль этой кривой так, чтобы в каждой точке он оставался перпендикулярным Γ, и перемещение конца вектора было непрерывным (это возможно благодаря гладкости поверхности). После перемещения вдоль всей кривой вектор нормали может совпасть с исходным, а может поменять свое направление на противоположное.

Определение 13 *Гладкая поверхность называется* **двусторонней**, *если после обхода вдоль произвольной замкнутой кривой вектор нормали не меняет свое направление. В противном случае поверхность называется* **односторонней**. **Сторона** *поверхности задается выбором одного из двух возможных направлений вектора нормали.*

Двустороннюю поверхность называют также ориентируемой, а одностороннюю — неориентируемой.

П р и м е р ы

- Поверхность, заданная в явном виде

$$z = f(x, y)$$

  является двусторонней. Например, можно выбрать верхнюю сторону этой поверхности, если в качестве нормали взять единичный вектор $\mathbf{n}^0 := \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$, где $\mathbf{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)$.

- Полная поверхность трехмерного тела является двусторонней (у нее есть естественным образом определяемые внешняя и внутренняя сторона).

- Самый известный пример односторонней поверхности — лента Мёбиуса. Возьмите полоску бумаги, склейте ее узкие стороны, предварительно перевернув одну из сторон на 180^o. Поставьте фломастер в середину ленты (по ширине), затем проведите линию посередине вдоль всей полоски. В некоторый момент фломастер окажется в той же точке, с которой вы начали, но с другой стороны.

В дальнейшем рассматриваются только двусторонние поверхности.

1.3.4 Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл первого рода.

Рассмотрим поверхность Γ, заданную в параметрическом виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v); \quad (u, v) \in D.$$

Определение 14 **Поверхностным интегралом первого рода** *от (скалярной) функции $f(M)$ по поверхности Γ, заданной в параметрическом виде, называется интеграл:*

$$\iint\limits_{\Gamma} f(M)dS := \iint\limits_{D} f(M(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\, dv.$$

Обратите внимание, что вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, длина которого участвует в определении поверхностного интеграла первого рода, уже встречался нам раньше: именно так выглядел вектор нормали в случае поверхности, заданной параметрически.

Пример

Рассмотрим поверхность тора, заданную в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x(\varphi, \psi) = & (R + r\cos\varphi)\cos\psi \\ y(\varphi, \psi) = & (R + r\cos\varphi)\sin\psi \\ z(\varphi, \psi) = & r\sin\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0; 2\pi), \psi \in [-\pi; \pi).$$

Одним из применений поверхностного интеграла первого рода является **вычисление площади поверхности**. Для этого достаточно положить $f \equiv 1$.

$$\mathbf{r}'_\varphi = (-r\sin\varphi\cos\psi, -r\sin\varphi\sin\psi, r\cos\varphi,$$

$$\mathbf{r}'_\psi = (-(R + r\cos\varphi)\sin\psi, (R + r\cos\varphi)\cos\psi, 0),$$

$$\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\psi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi \\ -(R + r\cos\varphi)\sin\psi & (R + r\cos\varphi)\cos\psi & 0 \end{vmatrix},$$

$$|\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\psi| = r(R + r\cos\varphi).$$

Таким образом, для вычисления площади поверхности тора нужно вычислить двойной интеграл

$$S = r\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} R + r\cos\varphi d\psi =$$

$$= 2\pi r \int_0^{2\pi} d\varphi R + r\cos\varphi =$$

$$= 2\pi r(2\pi R + 0) = 4\pi^2 rR.$$

Поверхностный интеграл второго рода.

Пусть $\mathbf{n}^0(M)$ — единичный нормальный вектор к поверхности Γ в точке M, задающий ориентацию поверхности.

Определение 15 **Поверхностный интеграл второго рода** *от векторного поля* $\mathbf{F}$ *по ориентированной поверхности* S *(или поток векторного поля* $\mathbf{F}$ *через поверхность* S *в выбранном направлении) определяется следующим образом:*

$$\iint\limits_{\Gamma} \mathbf{F}(M)\, d\mathbf{S} := \iint\limits_{\Gamma} \mathbf{F}(M)\cdot \mathbf{n^0}(M)\, dS.$$

Величина $d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0\, dS$ *называется векторным элементом поверхности.*

Пусть поверхность Γ задана в параметрическом виде. Тогда в качестве вектора нормали в каждой точке можно взять вектор $\mathbf{n}(M) := \pm(\mathbf{r}'_u(M) \times \mathbf{r}'_v(M))$, где знак выбирается в соответствии с выбором нужной стороны поверхности (чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать зависимость от точки и писать $\mathbf{n} := \pm(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)$). Тогда $\mathbf{n}^0 := \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$. Подставив эти выражения в определение поверхностного интеграла второго рода, получим:

$$\iint\limits_{\Gamma} \mathbf{F}(M)\, d\mathbf{S} := \iint\limits_{\Gamma} \mathbf{F}(M)\cdot \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} dS =$$

$$= \iint\limits_{D} \mathbf{F}(M(u,v))\cdot \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du\, dv = \iint\limits_{D} \mathbf{F}(M(u,v))\cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du\, dv.$$

Под знаком последнего интеграла стоит смешанное произведение векторов, таким образом, в декартовой системе координат получаем

$$\iint\limits_{\Gamma} \mathbf{F}(M)\, d\mathbf{S} = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P(M) & Q(M) & R(M) \\ x'_u(M) & y'_u(M) & z'_u(M) \\ x'_v(M) & y'_v(M) & z'_v(M) \end{vmatrix} du\, dv.$$

1.3.5 Длина дуги на поверхности. Первая квадратичная форма

Пусть задана гладкая поверхность

$$\Gamma:\ \mathbf{r} = \mathbf{R}(u,v).$$

Рассмотрим гладкую кривую γ, лежащую на поверхности Γ. Ее можно задать в виде

$$\gamma:\ \mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(u(t), v(t)).$$

Найдем квадрат дифференциала длины дуги кривой γ.

$$ds^2 = |\mathbf{r}'_\gamma(t)|^2 dt^2 = (\mathbf{r}'_\gamma(t))^2 dt^2 =$$

$$= (\mathbf{R}'_u \cdot u'_t + \mathbf{R}'_v \cdot v'_t)^2 dt^2 =$$

$$= \left(\mathbf{R}'^2_u \cdot (u'_t)^2 + 2\mathbf{R}'_u\mathbf{R}'_v \cdot u'_t \cdot v'_t + \mathbf{R}'^2_v \cdot (v'_t)^2\right) dt^2.$$

Введем обозначения

$$\begin{array}{l} E(u,v) := (\mathbf{R}'_u(u,v))^2 \\ F(u,v) := \mathbf{R}'_u(u,v) \cdot \mathbf{R}'_v(u,v) \\ G(u,v) := (\mathbf{R}'_v(u,v))^2. \end{array}$$

Теперь квадрат длины дуги можно выразить следующим образом

$$ds^2 = (Eu'^2_t + 2Fu'_t v'_t + Gv'^2_t)dt^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Подставим корень из этого выражения в формулу длины кривой:

$$l = \int_a^b \sqrt{Eu'^2_t + 2Fu'_t v'_t + Gv'^2_t} dt.$$

Определение 16 *Функции* E, F *и* G *называются* **коэффициентами первой квадратичной формы** *поверхности* Γ.

Матрица

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

называется **метрическим тензором** [1] *поверхности* Γ.

В матричной форме записи формула для дифференциала длины дуги выглядит так:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Кроме того, при помощи этой же матрицы мы можем вычислять скалярное произведение векторов, касательных к кривым. Пусть кроме кривой γ : $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(u(t), v(t))$ на поверхности Γ задана кривая $\tilde{\gamma}$: $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{R}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$. Тогда скалярное произведение векторов $\mathbf{r}'_t$ и $\tilde{\mathbf{r}}'_t$ можно вычислить по формуле

$$(\mathbf{r}'_t, \tilde{\mathbf{r}}'_t) = \begin{pmatrix} u'_t & v'_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}'_t \\ \tilde{v}'_t \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты первой квадратической формы являются "носителем информации" о геометрии поверхности: при решении задач удобно сначала один раз найти коэффициенты первой квадратичной формы, а потом использовать их при вычислении длин кривых и углов между кривыми, заданными во внутренних координатах поверхности.

[1] использование термина "тензор" будет объяснено позднее.

1.3.6 Площадь поверхности и первая квадратичная форма.

Выражение
$$\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right|,$$
которое мы использовали выше для определения поверхностного интеграла первого рода, удобно вычислять в терминах первой квадратичной формы.

$$\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right|^2 = |\mathbf{R}'_u \times \mathbf{R}'_v|^2 = |\mathbf{R}'_u|^2 |\mathbf{R}'_v|^2 \sin^2\theta,$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{R}'_u$ и $\mathbf{R}'_v$. Используя коэффициенты первой квадратичной формы, получаем:

$$|\mathbf{R}'_u|^2 |\mathbf{R}'_v|^2 \sin^2\theta = |\mathbf{R}'_u|^2 |\mathbf{R}'_v|^2 (1-\cos^2\theta) =$$
$$= EG - (\mathbf{R}'_u, \mathbf{R}'_v)^2 = EG - F^2.$$

Таким образом,
$$\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right| = \sqrt{EG-F^2}$$
и поверхностный интеграл первого рода можно записать в виде

$$\iint\limits_{\Gamma} f(M) dS := \iint\limits_{D} f(M(u,v))\sqrt{EG-F^2} du\, dv,$$

где коэффициенты первой квадратичной формы E, G и F являются функциями от u и v.

Глава 2

СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ ПОЛЯ

2.1 Скалярное поле

Определение 17 *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *- некоторая область*[1]. **Скалярным полем в** Ω *называется отображение* $u : \Omega \to \mathbb{R}$*, ставящее в соответствие точке* $M \in \Omega$ *число* $u(M) \in \mathbb{R}$.

Классическим примером скалярного поля является отображение, сопоставляющее каждой точке области температуру в этой точке.

Обратите внимание, что аргументом отображения является сама точка, а не ее координаты. Но для того, чтобы иметь возможность записать отображение **аналитически** (например, формулой, содержащей обычные математические функции - синусы, логарифмы и т.п.), на практике каждой точке сопоставляют набор чисел — координат этой точки.

П р и м е р

Пусть $\mathbb{T}$ — множество точек единичной окружности с центром в точке O, A — точка плоскости, лежащая вне круга, такая, что $|OA| = 2$. Рассмотрим отображение

$$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R},$$

которое каждой точке окружности $M \in \mathbb{T}$ ставит в соответствие расстояние от этой точки до точки A:

$$f(M) := |AM|.$$

[1] В основном мы будем работать с пространствами, размерность которых не превышает $n = 3$.

Мы задали наше отображение в *бескоординатной форме*. Посмотрим, как оно будет выглядеть при различном выборе систем координат.

1. Введем декартову систему координат так, чтобы начало координат находилось в точке O, а ось Ox была сонаправлениа с вектором $\overrightarrow{OA}$. Ось Oy направим перпендикулярно оси Ox так, чтобы система координат была правой. Тогда
$$f(M) = f(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

2. Введем полярную систему координат $(r;\ \phi)$: примем за полярное начало координат точку A, а полярную ось направим вдоль вектора $\vec{AO}$. Тогда формула получается совсем простой.
$$f(M) = f(r, \phi) = r.$$

3. Рассмотрим еще один пример. Сопоставим каждой точке окружности $M \in \mathbb{T}$ величину угла $\phi := \widehat{AOM} \in [0;\ 2\pi]$(в радианах). Тогда
$$f(M) = f(\phi) = \sqrt{(\cos\phi - 2)^2 + \sin\phi^2}.$$

   Обратите внимание, в этом примере мы описали положение точки на окружности с помощью лишь одного числа. Эта система координат определяет положение только тех точек, которые принадлежат нашей окружности. В этой системе координат невозможно описать положение, например, точки A — этой точки просто не существует в одномерном мире нашей окружности. Но для описания заданной функции такого задания оказывается достаточно. В данном случае формула получилась довольно громоздкой, но для произвольной функции, заданной на окружности, часто именно такой способ описания положения точки на окружности является наиболее удобным.

Замечание. Получается, что мы используем одну и ту же букву "f" для обозачения четырех совершенно разных отображений:
- исходного отображения, которое сопоставляет точке M число $f(M)$;
- отображения, которое паре чисел (x, y) сопоставляет число $\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$;
- отображения, которое паре чисел (r, ϕ) сопоставляет число r;
- а также отображения, сопоставляющего числу $\phi \in [0;\ 2\pi]$ число $\sqrt{(\cos\phi - 2)^2 + \sin\phi^2}$.

Если подходить к вопросу формально, то следовало бы ввести для этих отображений различные обозначения, но часто этого не делают, полагая, что разумный читатель сам догадается, какое из отображений имеется в виду в каждом конкретном случае (обычно это не вызывает затруднений, в тех же ситуациях, когда может возникнуть недоразумение, вводят дополнительные обозначения).

2.1.1 Множества уровня скалярного поля.

Определение 18 **Множеством уровня** *скалярного поля называется множество точек, в которых поле принимает одно и то же постоянное значение c.*

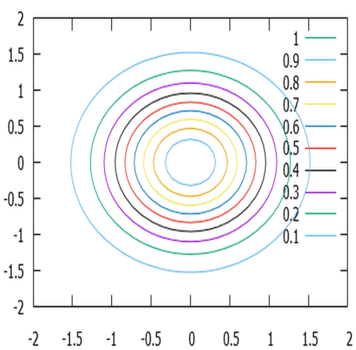
П р и м е р ы

1. Примеры из географии:
изобаты — линии на географической карте, проходящие через точки, в которых глубина водоёма равна некоторой константе, т.е. изобаты являются множествами уровня скалярного поля, сопоставляющего точке на карте число, равное глубине водоема в соответствующей точке земного шара;
изотермы - линии на карте, соединяющие точки с одинаковой температурой.

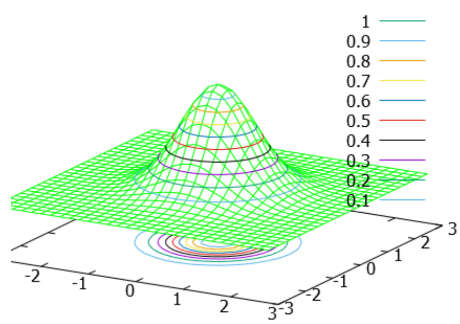
2. Пример из физики:
эквипотенциальные поверхности — поверхность, на которой скалярный потенциал равен некоторой константе.

3. Координатная плоскость $x0y$ в трехмерном пространстве является поверхностью уровня скалярного поля $u(x, y, z) = z$, соответствующей уровню $c = 0$.

4. Линии уровня скалярного поля $u(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ - семейство окружностей $x^2 + y^2 = C$:



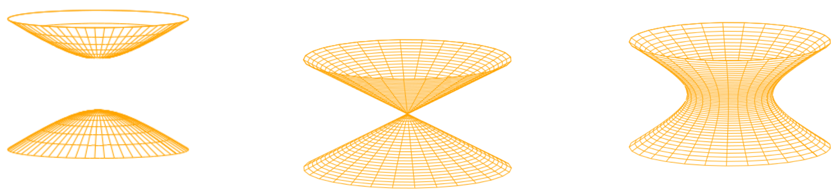
а) линии уровня $u(x, y) = const$;



б) линиями уровня называются линии, которые лежат в нижней плоскости, а не те линии, которые отмечены на поверхности $z = u(x, y)$;

Рис. 2.1:

5. Поверхности уровня скалярного поля $u(x, y) = x^2 + y^2 - z^2$:



а) $u(x,y) = -1$, двуполостный гиперболоид; б) $u(x,y) = 0$, конус; в) $u(x,y) = 1$, однополостный гиперболоид

Рис. 2.2: Поверхности уровня скалярного поля $u(x,y) = x^2 + y^2 - z^2$.

2.1.2 Производная по направлению и градиент.

Пусть в области Ω задано скалярное поле u. Зафиксируем точку $M_0 \in \Omega$ и ненулевой вектор $\mathbf{a}$. Рассмотрим точку $M_1 \in \Omega$, отличную от точки M_0 и такую, что вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\mathbf{a}$ сонаправлены:

$$\overrightarrow{M_0M_1} \upuparrows \mathbf{a}.$$

Устремим точку M_1 к точке M_0 с сохранением приведенных выше условий

Определение 19 *Если существует конечный предел*

$$\lim_{\substack{M_1 \to M_0,\\ \overrightarrow{M_0M_1} \upuparrows \mathbf{a}}} \frac{u(M_1) - u(M_0)}{|M_0M_1|},$$

то он называется **производной скалярного поля u по направлению a** *в точке M_0 и обозначается*

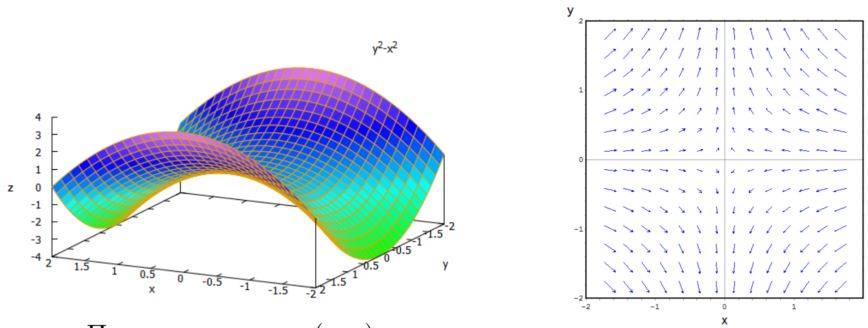
$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{a}} := \lim_{\substack{M_1 \to M_0,\\ \overrightarrow{M_0M_1} \upuparrows \mathbf{a}}} \frac{u(M_1) - u(M_0)}{|M_0M_1|}.$$

Физический смысл производной по направлению - скорость изменения поля в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{a}$.

Определение 20 Градиент $\operatorname{grad} u(M_0)$ *скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 - вектор, направление которого совпадает с направлением наибольшего возрастания $u(M)$, а модуль равен модулю производной $u(M)$ в этом направлении в точке M_0.*

Отметим одно важное свойство градиента: *градиент скалярного поля $u(M)$ в каждой точке $M_0 \in \Omega$ перпендикулярен множеству (линии или поверхности) уровня этого поля, проходящему через точку M_0.*

Приведем формулы для нахождения производной по направлению и градиента в **декартовой системе координат.** Предположим, что скалярное поле $u(M) = u(x,y,z)$ непрерывно дифференцируемо в области Ω.



Поверхность $z = u(x, y)$;

$\nabla u(x, y)$.

Рис. 2.3: Скалярное поле $u(x, y) = x^2 - y^2$ и его градиент

1. **Градиент в декартовой системе координат:**

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\mathbf{k}$$

2. **Производная по направлению в декартовой системе координат:**

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{a}} = (\operatorname{grad} u(M_0); \mathbf{a^0}) =$$
$$= \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\mathbf{a^0}$ - единичный вектор, сонаправленный с вектором $\mathbf{a}$, его координаты равны косинусам углов, которые вектор $\mathbf{a}$ составляет с соответствующими осями координат (направляющие косинусы):

$$\mathbf{a^0} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Градиент, как и другие дифференциальные операции над скалярными и векторными полями, часто записывают с использованием символического вектора

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

он называется **оператор набла** или **оператор Гамильтона.**

Тогда градиент скалярного поля в декартовых координатах можно рассматривать как формальное произведение вектора ∇ и скаляра u:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$$

2.2 Векторное поле

Определение 21 *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область.* **Векторным полем в** Ω *называется отображение* $\overrightarrow{F}: \Omega \to \mathbb{R}^n$*, ставящее в соответствие точке* $M \in \Omega$ *вектор* $\overrightarrow{F}(M) \in \mathbb{R}^n$.

Примеры

- Типичный пример векторного поля — поле скоростей частиц воды (например, в океане), т.е. отображение, сопоставляющее каждой точке вектор скорости жидкости в этой точке. Гидродинамическая интерпретация удобна своей наглядностью и помогает пониманию основных конструкций векторного анализа.
- Градиент скалярного поля — поле векторное.

2.2.1 Векторные линии

Определение 22 *Кривая называется* **векторной линией** *поля* $\overrightarrow{F}$*, если в каждой ее точке* M *вектор поля* $\overrightarrow{F}(M)$ *является касательным к этой кривой в точке* M.

Таким образом, кривая $\mathbf{r}(t)$ является векторной линией векторного поля $\mathbf{F}$, если вектора $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{F}$ коллинеарны.

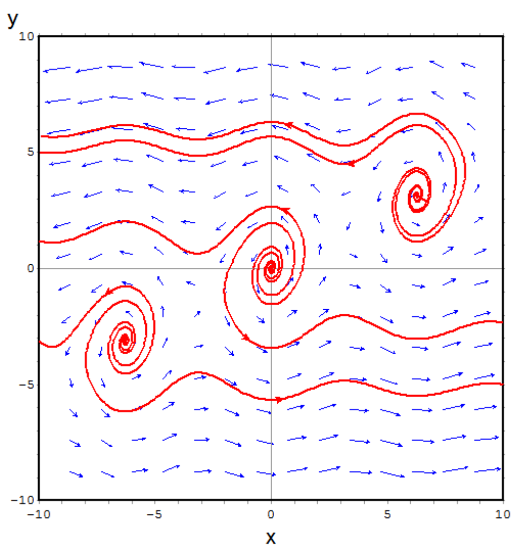


Рис. 2.4: Векторные линии двумерного поля $\mathbf{F}(x, y) = (x - 2y, 5\sin x)$.

П р и м е р ы

- Векторные линии поля ∇u — кривые, ортогональные множествам уровня скалярного поля u в каждой точке.
- Векторные линии поля скоростей твердого тела, вращающегося вокруг оси — окружности, центры которых расположены на этой оси.

Векторные линии в декартовой системе координат

Для того, чтобы найти векторные линии поля $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, нужно решить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

П р и м е р

Найдем векторные линии поля, заданного в декартовой системе координат:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2z^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Для этого решим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2z^2} = \frac{dz}{z}.$$

Перепишем систему так, чтобы в каждом уравнении участвовало по две переменные:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z} \\ \dfrac{dy}{2z^2} = \dfrac{dz}{z} \end{cases}$$

Получили уравнения с разделяющимися переменными. Решая их, получаем уравнения, задающие семейство векторных линий:

$$\begin{cases} x = C_1 z \\ y = z^2 + C_2 \end{cases}$$

2.2.2 Циркуляция векторного поля

Определение 23 Циркуляцией *векторного поля* $\mathbf{F}$ *вдоль кривой* Γ : $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\ t\in[a,b]$ *называется криволинейный интеграл второго рода:*

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)dt.$$

Циркуляция векторного поля указывает на его способность совершать работу при перемещении по замкнутым траекториям.

Циркуляция зависит от направления на контуре, при изменении направления обхода контура циркуляция меняет знак на противоположный.

Пример

Пусть γ — линия, полученная пересечением цилиндра $x^2+y^2=1$ и конуса $x^2+y^2=z^2$, ориентированная против часовой стрелки, если смотреть со стороны оси $0z$. Найдем циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{F}(x,y,z):=(x-y,-2y,z^2)$$

вдоль кривой γ.

Пересечением заданных поверхностей является окружность, запишем параметрические уравнения этой окружности:

$$\gamma:\ \mathbf{r}=(\cos t,\sin t,1),\ t\in[0,2\pi].$$

С ростом параметра t точка на окружности движется в нужном направлении. Векторное поле в точке на окружности, соответствующей параметру t, принимает значение $\mathbf{F}(\gamma(t)=(\cos t-\sin t,-2\sin t,1)$, Вычислим циркуляцию.

$$\mathbf{r}'(t)=(-\sin t,\cos t,0);$$
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)=(\cos t-\sin t)(-\sin t)+-2\sin t\cos t=-3\sin t\cos t+\sin^2 t,$$
$$\oint_\Gamma \mathbf{F}d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t-3\sin t\cos t)dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-3\int_0^{2\pi}\sin t\cdot d\sin t=\pi.$$

2.2.3 Поток векторного поля

Определение 24 *Поток векторного поля* $\mathbf{F}=\mathbf{F}(M)$ *через поверхность* S *определяется следующей формулой:*

$$\Phi_F=\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n^0}\,dS$$

где $\mathbf{n^0}$ — *единичный вектор нормали к поверхности* dS, *соответствующий выбранной стороне поверхности.*

Рассмотрим подробнее формулу из последнего определения. Возьмем в качестве вектора нормали вектор

$$\mathbf{n} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

Используя определение поверхностного интеграла первого рода, сведем интеграл к двойному интегралу по области D:

$$\Phi_F = \iint\limits_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 dS = \iint\limits_{D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 \cdot |\mathbf{n}| \, du \, dv.$$

Так как $\mathbf{n}^0 = \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$, получаем

$$\Phi_F = \iint\limits_{D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 \cdot |\mathbf{n}| \, du \, dv = \iint\limits_{D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, du \, dv.$$

Выражение, стоящее под знаком последнего интеграла, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ — это скалярное произведение векторов, причем второй вектор является результатом векторного произведения. Таким образом, мы можем записать нашу формулу, используя смешанное произведение:

$$\Phi_F = \iint\limits_{D} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv = \iint\limits_{D} \left(\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv.$$

Для представления о физическом смысле потока можно рассмотреть движение несжимаемой жидкости. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ — векторное поле скорости течения. Тогда объём жидкости, который протечёт за единицу времени через поверхность S, будет равен потоку векторного поля $\mathbf{v}$. Поток зависит от выбора стороны поверхности, при смене стороны поток меняет знак на противоположный.

Вычисление потока в декартовой системе координат.

Пусть векторное поле задано в декартовой системе координат:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x.y.z)\mathbf{i} + Q(x.y.z)\mathbf{j} + R(x.y.z)\mathbf{k}.$$

Тогда для вычисления потока можно воспользоваться следующей формулой:

$$\Phi_F = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du \, dv.$$

Пример

Вычислим поток векторного поля

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (x - y, -2y, z^2)$$

через часть поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, вырезаемую цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ (в направлении нормали, составляющей острый угол с осью $0z$).

Найдем нормаль:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\mathbf{n} = \pm(z'_x, z'_y, -1) = \pm(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1),$$

выбираем знак, так как нам нужна верхняя сторона поверхности.

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{2},$$

$$\mathbf{n^0} = -(\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Дифференциал площади поверхности равен

$$dS = \sqrt{2} dxdy.$$

Вычисляем поток:

$$\Phi_F = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n^0} dS =$$

$$= -\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{-2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - z^2 \right) dxdy =$$

(так как мы находимся на конусе, то $z = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$= -\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{x^2 - xy - 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x^2 - y^2 \right) dxdy =$$

(перейдем к полярной системе координат, $x = r\cos t, y = r\sin t, dxdy = rdrdt$)

$$= -\int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} (r\cos^2 t - r\cos t \sin t - 2r\sin^2 t - r^2) rdrdt =$$

$$= -\int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} (r\frac{1 + \cos 2t}{2} - r\cos t \sin t - 2r\frac{1 - \cos 2t}{2} - r^2) rdrdt =$$

$$= -\int_0^1 (-\pi r - 2\pi r^2) rdr = \pi/3 + \pi/2 = 5\pi/6.$$

2.2.4 Дивергенция

Пусть задано векторное поле $\mathbf{F}$. Будем считать, что это поле задает поле скоростей несжимаемой жидкости.

Рассмотрим замкнутую поверхность Γ, ограничивающую некоторую область D в пространстве. Поток поля $\mathbf{F}$ через поверхность Γ (для замкнутых поверхностей при вычислении потока всегда будем выбирать внешнюю сторону), из гидродинамических соображений, является некоторой мерой источников и стоков, находящихся внутри поверхности.

Рассмотрим отношение потока жидкости через поверхность Γ к объему области, ограниченной этой поверхностью

$$\frac{\iint\limits_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 dS}{V(D)},$$

мы получим среднюю плотность источников (стоков) в области D.

Теперь будем стягивать поверхность к некоторой точке M.

Определение 25 **Дивергенцией** *векторного поля* $\mathbf{F}$ *в точке* M *называется предел отношения потока поля через бесконечно малую замкнутую поверхность, окружающую точку* M*, к величине объёма, ограниченного этой поверхностью:*

$$\text{div } \mathbf{F}(M) := \lim_{D \to M} \frac{\iint\limits_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 dS}{V(D)}.$$

Дивергенцию векторного поля можно интерпретировать как плотность источников и стоков этого поля:

- если $\text{div } \mathbf{F} > \mathbf{0}$, то точка поля является источником;
- если $\text{div } \mathbf{F} < \mathbf{0}$, то точка поля является стоком.

Дивергенция в декартовой системе координат

Пусть векторное поле задано в декартовой системе координат:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x.y.z)\mathbf{i} + Q(x.y.z)\mathbf{j} + R(x.y.z)\mathbf{k}.$$

Можно показать, что верна следующая формула:

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Пример

Вычислим дивергенцию векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) := (x - y, -2y, z^2)$:

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial (x - y)}{\partial x} + \frac{\partial (-2y)}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} = 2z - 1.$$

2.2.5 Ротор

Пусть задано векторное поле $\mathbf{F}$.

Выберем произвольный вектор $\mathbf{n}$. Ротор мы определим как вектор, заданный своими проекциями на $\mathbf{n}$ для произвольных направлений.

Определение 26 *Ротор векторного поля — вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции векторного поля по контуру γ плоской площадки S, перпендикулярной к этому направлению, к площади $|S|$ этой площадки, когда размеры площадки стремятся к нулю, а сама площадка стягивается в точку:*

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{F}(M) = \lim_{S \to M} \frac{\oint\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{|S|}.$$

Нормаль $\mathbf{n}$ к площадке направлена так, чтобы при вычислении циркуляции обход по контуру γ совершался против часовой стрелки.

Если использовать гидродинамическую интерпретацию, то $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ — это вектор, пропорциональный вектору угловой скорости бесконечно малой частицы жидкости.

Ротор в декартовой системе координат

Пусть векторное поле задано в декартовой системе координат:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x.y.z)\mathbf{i} + Q(x.y.z)\mathbf{j} + R(x.y.z)\mathbf{k}.$$

Можно показать, что верна следующая формула:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Пример

Вычислим ротор векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) := (x - y, -2y, z^2)$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - y & -2y & z^2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}.$$

2.3 Основные теоремы теории векторного поля

2.3.1 Теорема Стокса.

Теорема 1 *Пусть S — гладкая ориентированная поверхность, а γ — замкнутая гладкая кривая, являющаяся границей поверхности S. Пусть $\mathbf{n}^0$ - единичный вектор нормали к поверхности S, задающий одну из её сторон. Выберем на γ такое направление обхода, что при взгляде с конца вектора $\mathbf{n}^0$ оно происходит против часовой стрелки, т. е. поверхность остается слева.*

Пусть векторное поле $\mathbf{F}$ непрерывно дифференцируемо на S и γ. Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}^0\, dS$$

Другими словами, теорема Стокса утверждает, что циркуляция векторного поля $\mathbf{F}$ по замкнутому контуру γ равна потоку ротора этого поля через поверхность, натянутую на γ.

Пример

Вернемся к примеру, рассмотренному в пункте 2.2.2 и найдем циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (x - y, -2y, z^2)$$

вдоль кривой $\gamma:\ \mathbf{r} = (\cos t, \sin t, 1),\ t \in [0, 2\pi]$ по формуле Стокса (разумеется, результат от этого не должен измениться). Для этого нам понадобится ротор этого поля, найденный в примере к пункту 2.2.5:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{k}.$$

Натянем на окружность γ часть плоскости $z = 1$ и найдем поток через верхнюю сторону этой поверхности. Единичный вектор нормали, задающий нужную сторону, имеет координаты $\mathbf{n}^0 = (0, 0, 1)$

$$\Phi = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbf{F}\mathbf{n}^0 dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} z^2 dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} dS = \pi.$$

2.3.2 Теорема Гаусса-Остроградского.

Теорема 2 *Пусть S - замкнутая кусочно-гладкая ориентируемая поверхность, являющаяся границей некоторого тела V, и $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор внешней нормали к S. Пусть векторное поле $\mathbf{F}$ непрерывно дифференцируемо на V и S. Тогда имеет место формула Гаусса-Остроградского:*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}^0\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F} dV.$$

Таким образом, теорема Гаусса-Остроградского утверждает, что поток векторного поля $\mathbf{F}$ через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по области V, ограниченной поверхностью S.

Пример

Вернемся к примеру, рассмотренному в пункте 2.2.3 и вычислим поток векторного поля

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (x - y, -2y, z^2)$$

через верхнюю часть конуса $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, вырезаемую цилиндром $x^2+y^2 = 1$, по формуле Гаусса-Остроградского. Эта формула работает только для замкнутых поверхностей, поэтому дополним часть конуса частью плоскости $z = 1$ так, чтобы поверхность оказалась замкнутой, объем, ограниченный этой поверхностью, обозначим V. Тогда поток через замкнутую поверхность можно вычислить при помощи тройного интеграла от дивиргенции заданного поля, которая была найдена в пункте 2.2.4 (мы ставим минус перед знаком интеграла, так как нам нужен поток в направлении внутренней нормали).

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz = -\iiint_V (2z - 1)dxdydz =$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\leq 1} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} (2z - 1)dz =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (r^3 - r^2)drdt = 2\pi(1/4 - 1/3) = -\pi/6.$$

Теперь, чтобы найти поток через конус, нужно вычесть из потока через заскнутую поверхность поток через часть плоскости в направлении нормали $(0, 0, -1)$:

$$\Phi = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (-z^2)dS = -\iint_{x^2+y^2\leq 1} dS = -\pi$$

. Таким образом, поток через поверхность конуса равна

$$-\pi/6 + \pi = 5\pi/6.$$

2.3.3 Различные формулы с использованием оператора Гамильтона

Мы ввели три различных дифференциальных оператора над полями:

- градиент скалярного поля: $\operatorname{grad} u = \nabla\, u$
- дивергенция векторного поля: $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$;
- ротор векторного поля: $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$.

Пусть заданы скалярные поля ϕ и ψ и векторные поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Верны следующие формулы:

1. $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$;
2. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$;
3. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$;
4. $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$;
5. $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$;
6. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla^2\mathbf{A})$;
7. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$;
8. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$;
9. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$;
10. $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$.

2.4 Типы скалярных и векторных полей.

2.4.1 Типы симметрии полей

Определение 27 *Скалярное или векторное поле называется* **плоскопараллельным,** *если существует такое направление* **a***, при сдвигах вдоль которого поле переходит само в себя.*

Если ввести декартову систему координат так, чтобы ось Oz была направлена вдоль вектора **a**, то векторное поле будет зависеть только от координат x и y.

Определение 28 *Скалярное или векторное поле называется* **осесимметрическим,** *если существует такая прямая l, при поворотах вокруг которой поле переходит само в себя.*

Если ввести цилиндрическую систему координат так, чтобы ось Oz была параллельна прямой l, то поле будет зависеть только от координат r и z. Если при этом поле не зависит также и от координаты z, то оно называется цилиндрическим.

Определение 29 *Скалярное поле называется* **сферическим,** *если его значения зависят только от расстояния от некоторой фиксированной точки O.*

Если ввести сферическую систему координат, взяв в качестве начала координат точку O, то поле будет зависеть только от r. Поверхности уровня такого поля — концентрические сферы.

Определение 30 *Векторное поле называется* **одномерным,** *если существует декартова система координат, в которой компоненты этого поля имеют вид $(P(x), 0, 0)$.*

Векторные линии одомерного векторного поля параллельны оси Ox

2.4.2 Некоторые специальный виды полей

Определение 31 *Векторное поле* **A** *называется* **безвихревым***, если в каждой его точке ротор поля равен нулю:*

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

Определение 32 *Векторное поле* **A** *называется* **потенциальным***, если оно является градиентом некоторого скалярного поля:*

$$\exists \varphi : \mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi,$$

где M_0 — произвольная фиксированная точка области.

Поле φ в этом случае называется **потенциалом** векторного поля

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Теорема 3 *В односвязной области (например, в $\mathbb{R}^3$) векторное поле является безвихревым тогда и только тогда, когда оно потенциально.*

Для произвольной области из условия потенциальности поля следует, что оно является безвихревым (обратное не всегда верно!).

Если векторное поле потенциально, то его работа не зависит от вида траектории, а определяется только начальным и конечным положением точки и равна разности значений потенциала поля в этих точках:

$$\int\limits_{M_1 M_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(M_2) - \varphi(M_1).$$

Потенциал векторного поля (если он существует) может быть найден по формуле

$$\varphi(M) = \int_{M_0}^{M} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + const.$$

Определение 33 *Векторное поле* **A** *называется* **соленоидальным (трубчатым)***, если в каждой его точке дивергенция обращается в ноль:*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Из формулы Гаусса-Остроградского следует, что поток соленоидального поля через замкнутую поверхность равен нулю.

Определение 34 *Векторное поле* **W** *называется* **векторным потенциалом** *поля* **A***, если*

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{W}.$$

Теорема 4 *В односвязной области (например, в $\mathbb{R}^3$) векторное поле является соленоидальным тогда и тогда, когда у него есть векторный потенциал.*

Для произвольной области из условия существования векторного потенциала следует, что поле является соленоидальным (обратное не всегда верно!). поле **A** *можно представить как ротор некоторого векторного поля:*

Определение 35 *Векторное поле называется* **гармоническим (лапласовым)***, если в каждой точке пространства для него одновременно выполняются условия:*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

В односвязной области гармоническое поле является потенциальным, следовательно $\mathbf{A}$ можно представить как $\mathbf{A} = \operatorname{grad}\varphi$. Подставляя это выражение в $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$ получим
$$\Delta\varphi = 0.$$

Теорема 5 (Теорема Гельмгольца) *Любое гладкое векторное поле является суммой безвихревого и соленоидального векторных полей.*

2.5 Криволинейные координаты в $\mathbb{R}^3$. Координатные линии и координатные поверхности.

Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ *декартову систему координат*: выберем точку O (*начало отсчета*) и три взаимно ортогональных единичных вектора $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ (*ортонормированный базис*). Положение произвольной точки $M \in \mathbb{R}^3$ взаимнооднозначно определяет упорядоченная тройка чисел (x_M, y_M, z_M) — *координаты точки* M, то есть координаты радиус-вектора $\overrightarrow{r_M} := \overrightarrow{OM}$ в выбранном базисе:

$$\overrightarrow{r_M} = x_M \cdot \overrightarrow{i} + y_M \cdot \overrightarrow{j} + z_M \cdot \overrightarrow{k}.$$

Эта координатная система хорошо знакома каждому, интуитивно понятна, но при решении некоторых задач может оказаться неудобной, приводить к избыточно сложным формулам.

Определение 36 *Пусть Ω — некоторая область в $\mathbb{R}^3$.* **Криволинейными координатами** *точки $M \in \Omega$ называются числа q_1, q_2, q_3 такие, что упорядоченная тройка (q_1, q_2, q_3), однозначно определяет положение точки M в области Ω*[2].

Итак, у нас есть два способа описания положения одной и той же точки $M \in \Omega$: декартовы (x_M, y_M, z_M) и криволинейные (q_1, q_2, q_3) координаты. Предположим, что эти два способа связаны друг с другом "достаточно хорошей" функциональной зависимостью. Точнее, пусть заданы непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(q_1, q_2, q_3),$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3),$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3),$$

связывающие криволинейную систему координат с декартовой, причем такие, что **якобиан**

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

не равен нулю в каждой точке $M \in \Omega$.

Определение 37 *Семейства поверхностей, задаваемых уравнениями*

$$\Gamma_k : \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3), \ q_k = const, \ k = 1, 2, 3,$$

называются **координатными поверхностями**. *Попарные пересечения координатных поверхностей называются координатными линиями.*

[2] Слово "криволинейные" используют для подчеркивания того, что координаты в общем случае могут отличаться от декартовых (которые являются частным случаем криволинейных координат).

П р и м е р ы

1. Согласно данному определению, в декартовой системе координат координатной мы называем любую плоскость, параллельную плоскостям xOy, yOz, zOx, а не только сами эти плоскости. Координатные линии — все прямые, параллельные осям Ox, Oy, Oz.

2. В сферической системе координат координатные поверхности бывают трех типов:

   - концентрические сферы $r = const$;
   - полуплоскости $\phi = const$;
   - конические поверхности $\theta = const$.

     Координатные линии в этом случае тоже можно разделить на три типа: окружности ("параллели"), полуокружности ("меридианы") и лучи.

3. Подумайте, какими будут координатные поверхности и линии в цилиндрической системе координат.

2.6 Локальный базис

Введем в каждой точке области Ω базис, состоящий из векторов, касательных к координатным кривым, проходящим через эту точку:

$$\mathbf{e}_1 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}; \ \ \mathbf{e}_2 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}; \ \ \mathbf{e}_3 := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}.$$

Нетрудно заметить, что якобиан равен смешанному произведению векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

А так как условие отличия от нуля смешанного произведения векторов равносильно их линейной независимости, то условие (2.1) гарантирует, что тройка векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ действительно является базисом в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Определение 38 *Тройка векторов* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *называется* **локальным базисом** *криволинейной системы координат Этот базис в общем случае является переменным: при переходе от точки* M_1 *к точке* M_2 *мы получим новую тройку векторов.*

П р и м е р

Рассмотрим сферическую систему координат.

Найдем локальный базис в точке M с координатами $\rho = 1, \varphi = \pi/3, \theta = \pi/4$. Декартовы координаты этой точки $M(\sqrt{2}/4, \sqrt{6}/4, \sqrt{2}/2)$. Для нахождения локального базиса продифференцируем вектор $\mathbf{r}$ по переменным ρ, φ и θ:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \\ \mathbf{e}_\theta = (\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, -\rho\sin\theta), \\ \mathbf{e}_\varphi = (-\rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, 0). \end{cases}$$

В точке M локальный базис образуют вектора

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = (\sqrt{2}/4, \sqrt{6}/4, \sqrt{2}/2), \\ \mathbf{e}_\theta = (\sqrt{2}/4, \sqrt{6}/4, -\sqrt{2}/2), \\ \mathbf{e}_\varphi = (-\sqrt{6}/4, \sqrt{2}/4, 0). \end{cases}$$

2.7 Метрический тензор криволинейной системы координат

Нам уже встречался термин "метрический тензор" для поверхности, как было отмечено, они служат носителем информации о геометрии поверхности и используются для вычисления длин кривых и углов между кривыми. Аналогичную роль выполняет метрический тензор и в случае криволинейных координат в трехмерном пространстве.

Пусть в области Ω задана некоторая кривая γ:

$$\gamma: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \ t \in [a, b].$$

Определение 39 Метрическим тензором *называется матрица g, компоненты которой равны скалярным произведениям векторов локального базиса:*

$$g_{ij}(M) := \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Используя метрический тензор запишем квадрат дифференциала длины дуги в криволнейных координатах:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dq_1 & dq_2 & dq_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{pmatrix}.$$

2.8 Ортогональные криволинейные координаты. Коэффициенты Ламэ

Определение 40 *Система криволинейных координат*

$$q_k = \phi_k(x, y, z), \quad k = 1, 2, 3$$

называется **ортогональной**, *если в каждой точке M векторы локального базиса попарно перпендикулярны.*

В этом случае внедиагональные элементы метрического тензора равны нулю, а диагональные элементы равны квадратам длин векторов локального базиса

Определение 41 **Коэффициентами Ламэ** *называются величины*

$$H_i = |\mathbf{e}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2};\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Таким образом, метрический тензор ортогональной системы координат имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^2 \end{pmatrix}.$$

В Приложении приведены коэффициенты Ламэ для некотороых часто используемых ортогональных систем координат, а также формулы, позволяющие использовать дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных системах координат.

Глава 3

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В этой главе мы введем понятие ортогонального тензора в пространстве $\mathbb{R}^3$ как некоторое обобщение трехмерного вектора. Для этого в первом разделе напомним, как меняются координаты вектора при переходе от одного ортонормарованного базиса к другому. Термин "ортогональный" по отношению к тензору будет означать, что мы используем только ортогональные системы координат. Мы, как правило, будем опускать этот термин и говорить просто "тензор". Аналогично можно ввести и многомерные ортогональные тензоры.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующее соглашение, часто используемое в тензорной алгебре.

Правило суммирования Эйнштейна: *если в выражении некоторый индекс повторяется дважды, то по этому индексу проводится сумирование от 1 до 3.*

П р и м е р

1. Формулу вычисления скалярного произведения векторов, заданных в ортонормированной системе координат

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j$$

с использованием правила Эйнштейна можно записать так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_j b_j.$$

2. Используем правило Эйнштейна для записи произведения матриц:

$$AB = C,$$

где

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj}$$

или, используя правило Эйнштейна,

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj}.$$

3.1 Преобразование координат вектора при повороте декартовой системы координат.

Этот раздел содержит хорошо известные сведения из векторной геометрии и служит мотивировкой для введения понятия тензора.

Рассмотрим два ортонормированных базиса $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ и $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3})$ ("старый" и "новый") в пространстве $\mathbb{R}^3$. Напомним, что базис называтся ортонормированным, если

$$(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Определение 42 **Символом Кронекера** *называется величина*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

С использованием символа Кронекера условие ортонормированности базиса записывается так:

$$(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}) = \delta_{ij}.$$

Мы будем предполагать, что все базисы образуют правые тройки векторов. В этом случае каждый ортонормированный базис можно получить из другого ортонормированного базиса с помощью поворота вокруг начала координат. Рассмотрим подробнее связь старого и нового базисов.

Разложим векторы нового базиса по старому:

$$\begin{aligned} \mathbf{e'_1} &= \alpha_{11}\mathbf{e_1} + \alpha_{12}\mathbf{e_2} + \alpha_{13}\mathbf{e_3}, \\ \mathbf{e'_2} &= \alpha_{21}\mathbf{e_1} + \alpha_{22}\mathbf{e_2} + \alpha_{23}\mathbf{e_3}, \\ \mathbf{e'_3} &= \alpha_{31}\mathbf{e_1} + \alpha_{32}\mathbf{e_2} + \alpha_{33}\mathbf{e_3}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Матрица

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей перехода** от старого базиса $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ к новому $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3})$.

С учетом правила Эйнштейна уравнения (3.1) можно записать так:

$$\mathbf{e'_i} = \alpha_{ij}\mathbf{e_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Найдем попарные скалярные произведения векторов $\mathbf{e'_i}$ и $\mathbf{e_k}$. Используя уравнения (3.1) и ортонормированность базисов, получим:

$$(\mathbf{e'_i}, \mathbf{e_k}) = (\alpha_{ij}\mathbf{e_j}, \mathbf{e_k}) = (\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\mathbf{e_j}, \mathbf{e_k}) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}(\mathbf{e_j}, \mathbf{e_k}) = \alpha_{ik}.$$

Таким образом, мы получили правило нахождения элементов матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому:

$$\alpha_{ik} = (\mathbf{e'_i}, \mathbf{e_k}). \tag{3.2}$$

Аналогично можно построить матрицу перехода от нового базиса к старому. Очевидно, что $\beta = \alpha^{-1}$. С другой стороны,

$$\mathbf{e_i} = \beta_{ij}\mathbf{e_j}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\beta_{ik} = (\mathbf{e'_k}, \mathbf{e_i}) = \alpha_{ki} = \alpha^{-1}_{ik}.$$

Таким образом, матрица перехода от нового базиса к старому равна транспонированной матрице перехода от старого базиса к новому:

$$\beta = \alpha^T = \alpha^{-1}.$$

Зафиксируем некоторый вектор $\mathbf{a}$. Этот вектор, как геометрический объект, не зависит от того, в какой системе координат мы его рассматриваем, но его координаты, разумеется, меняются при переходе от одного базиса к другому. Пусть компоненты вектора в старом базисе равны (a_1, a_2, a_3), а в новом (a'_1, a'_2, a'_3). Тогда, используя правило Эйнштейна, можно записать

$$\mathbf{a} = a_j\mathbf{e_j} = a'_k\mathbf{e'_k}.$$

Домножим это равенство на $\mathbf{e'_i}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e'_i}) = a_j(\mathbf{e_j}, \mathbf{e'_i}) = a'_k(\mathbf{e'_k}, \mathbf{e'_i}).$$

Используя (3.2) и ортонормированность базисов, получим

$$a'_i = \alpha_{ij}a_j. \tag{3.3}$$

Аналогично можно получить

$$a_i = \alpha_{ji}a'_j.$$

Отметим, что в случае неортогональных систем координат теория значительно усложняется, а именно, вместе с каждым базисом вводится так называемый взаимный базис, при этом координаты вектора в исходном базисе называют контравариантными, а во взаимном — ковариантными.

3.2 Определение тензора.

В предыдущем разделе мы видели, что при переходе от одного ортонормированного базиса к другому координаты произвольного вектора меняются по некоторому определенному правилу. Можно определить вектор, исходя из этого правила, т.е. назвать вектором совокупность трех величин, которые при переходе к новому ортонормированному базису должны изменяться в соответствии с правилом преобразования координат вектора (3.3). Именно такое определение вектора мы возьмем за основу для определения ортогонального тензора в трехмерном пространстве.

Определение 43 *Говорят, что совокупность* 3^R *величин, заданных в каждом ортонормированном базисе, образует* **тензор ранга** R *в пространстве* $\mathbb{R}^3$*, если при переходе к новому ортонормированному базису эти величины в старом и новом базисах связаны следующим соотношением:*

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_R} = \alpha_{i_1 k_1} \alpha_{i_2 k_2} \dots \alpha_{i_R k_R} T_{k_1 k_2 \dots k_R}.$$

Благодаря свойствам матрицы перехода, можно также записать обратное преобразование компонент тензора:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_R} = \alpha_{k_1 i_1} \alpha_{k_2 i_2} \dots \alpha_{k_R i_R} T_{k_1 k_2 \dots k_R}.$$

Тензор нулевого ранга.

Согласно данному определению, тензором нулевого ранга называется величина, не изменяющаяся при повороте системы координат. Примерами таких величин могут служить длина, температура, поток векторного поля через поверхность.

В то же время проекция вектора на координатную ось в трехмерном пространстве меняется при переходе к другим базисам, поэтому тензором нулевого ранга она не является.

Тензор первого ранга.

Тензором первого ранга называется совокупность трех величин, преобразующихся при переходе к новой системе координат по правилу

$$T'_i = \alpha_{ik} T_k.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3.3) видим, что такая величина является обычным вектором в трехмерном пространстве, заданным своими координатами в ортонормированном базисе.

Тензор второго ранга.

Тензор второго ранга в $\mathbb{R}^3$ имеет 9 компонент, закон его преобразования при переходе к новому базису выглядит так:

$$T'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}.$$

По аналогии с примером 2 из начала главы можно интерпретировать эту формулу как произведение матриц:

$$T'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}T_{kl} = \alpha_{ik}T_{kl}\alpha^T_{lj},$$

таким образом, можно записать формулу перехода к новому базису в матричной форме:

$$T' = \alpha T \alpha^T.$$

П р и м е р

Пусть в некоторой системе координат задан тензор ранга 2

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим новую систему координат, полученную из исходной поворотом вокруг оси Oy на угол $\pi/6$ по часовой стрелки (если смотреть со стороны положительного направления оси Oy). Для нахождения матрицы перехода используем (3.2):

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Теперь используем матричную форму формулы перехода к новому базису для тензора второго ранга:

$$T' = \alpha T \alpha^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

3.3 Операции над тензорами.

3.3.1 Сложение тензоров.

Сложение тензоров производится покомпонентно при этом складывать можно только тензоры одинаковых рангов:

$$A_{i_1\ldots i_R} + B_{i_1\ldots i_R} = C_{i_1\ldots i_R},$$

Проверим, что результатом сложения будет тензор того же ранга, что и исходные. Действительно, при переходе к новой системе координат получаем:

$$C'_{i_1 i_2\ldots i_R} = A'_{i_1 i_2\ldots i_R} + B'_{i_1 i_2\ldots i_R} =$$

$$= \alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}...\alpha_{i_Rk_R}A_{k_1k_2...k_R} + \alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}...\alpha_{i_Rk_R}B_{k_1k_2...k_R} =$$
$$= \alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}...\alpha_{i_Rk_R}(A_{k_1k_2...k_R} + B_{k_1k_2...k_R}) =$$
$$= \alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}...\alpha_{i_Rk_R}C_{k_1k_2...k_R}.$$

Таким образом,

$$C'_{i_1i_2...i_R} = \alpha_{i_1k_1}\alpha_{i_2k_2}...\alpha_{i_Rk_R}C_{k_1k_2...k_R}.$$

3.3.2 Произведение тензоров.

Произведением тензоров A и B рангов R_1 и R_2 (соответственно) является тензор C ранга $R_1 + R_2$, компоненты которого определяются следующим образом:

$$C_{i_1...i_{R_1}k_1...k_{R_2}} = A_{i_1...i_{R_1}}B_{k_1...k_{R_2}}.$$

П р и м е р

Найдем произведение двух тензоров ранга 1: $A = (1\ 0\ 3)$ и $B = (0\ -1\ 4)$. Результатом такого произведения будет тензор второго ранга (запишем его в виде матрицы):

$$C_{ij} = A_iB_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Свёртка.

Сверткой тензора по паре индексов (i,j) называется операция умножения на символ Кронекера δ_{ij} и суммирования по обоим его индексам. При этом ранг тензора уменьшается на 2.

П р и м е р

1. Для тензора пятого ранга свертка по последним двум индексам производится следующим образом (не забываем про правило Эйнштейна!):

$$T_{ijklm}\delta_{lm} = T_{ijkll}.$$

Просуммировав по повторяющемуся индексу l мы получим совокупность 3^3 величин, т.е. тензор ранга 3.

2. Рассмотрим тензор второго ранга. Его свертка (по единственной паре индексов) називаеся **следом** и обозначается $Tr(A_{ij})$ или $Sp(A_{ij})$:

$$Tr(A_{ij}) = A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii}.$$

В результате получим тензор нулевого порядка, т.е. величину, которая не меняется при переходе к новой системе координат. Таким образом, след тензора второго ранга инвариантен по отношению к поворотам системы координат:

$$Tr(A_{ij}) = A_{ii} = A'_{jj} = Tr(A'_{ij}).$$

Другими примерами инвариантов тензора второго ранга могут служить собственные числа тензора, его собственные векторы, определитель матрицы, составленной из компонентов тензора второго ранга.

П р и м е р

Проверим, что при переходе к новой системе координат в примере из пункта 3.2 след тензора и определитель не изменились.

Действительно,

$$Tr(T) = 0 + 0 + 1 = 1,$$

$$Tr(T') = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + 0 + \frac{3-\sqrt{3}}{4} = 1 = Tr(T);$$

$$det(T) = 1 = det(T').$$

3.3.4 Симметрия тензоров

Определение 44 *Тензор второго ранга нвзывается* **симметричным***,если соответствующая ему матрица*

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

в каждом ортонормированном базисе является симметричной, т.е.

$$T_{ij} = T_{ji}, \ \ i, j = 1, 2, 3.$$

Определение 45 *Тензор второго ранга нвзывается* **анисимметричным***,если соответствующая ему матриц в каждом ортонормированном базисе является антисимметричной:*

$$T_{ij} = -T_{ji}, \ \ i, j = 1, 2, 3.$$

Несложно показать, что если тензор в некотором базисе представляется симметричной (антисимметричной) матрицей, то его матрица останется симметричной (антисимметричной) и в любом другом ортонормированном базисе. Покажем это, например, для антисимметричного тензора $T_{ij} = -T_{ji}$. Проверим, что при повороте системы координат (матрица поворота α) новые компоненты тензора T'_{ij} тоже будут обладать свойством антисимметрии. Децствительно:

$$T'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}(-T_{kl}) = -\alpha_{ik}\alpha_{jl}T_{kl} = -T'_{ij}.$$

Говорят также о симметрии (антисимметрии) по паре индексов более высокого порядка, при этом тензор может быть симметричен по одной паре индексов и антисимметричен по другой. Например, если

$$T_{ijkl} = T_{jikl}, \;\; T_{ijkl} = -T_{ijlk},$$

то говорят, что тензор четвертого ранга T симметричен по первой паре индексов (i, j) и антисимметричен по последней паре индексов (k, l).

Из определений симметричного тензоров второго ранга следует, что для его задания достаточно знать только шесть его компонент, расположенных над главной диагональю и на ней. Для антисимметричного тензора независимыми являются только при компоненты, стоящие над главной диагональю (диагональные компоненты антисимметричного тензора, как следует из определения, всегда равны нулю).

П р и м е р

Пусть даны два тензора ранга один A и B. Рассмотрим систему величин

$$C_{ij} = A_iB_j - A_jB_i.$$

Это тензор второго ранга. Нетрудно видеть, что $C_{ij} = -Cji$. Для описания совокупности величин C достаточно знать три величины: C_{23}, C_{31}, C_{12}. Эти величины являются координатами векторного произведения векторов A и B:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = C_{23}\mathbf{e_1} + C_{31}\mathbf{e_2} + C_{12}\mathbf{e_3}.$$

Теорема 6 *Каждый тензор второго ранга может быть разложен в сумму симметричного и атисимметричного.*

Действительно, для произвольного тензора T_{ij} рассмотрим тензоры

$$S_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2},$$

$$A_{ij} = \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2}.$$

Нетрудно видеть, что тогда

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad A_{ij} = -A_{ji} \quad \text{и} \quad T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}.$$

Символы Кронекера и Леви-Чивиты.

Важными примерами симметричного и антисимметричного тензоров являются символ Кронекера (дельта-символ) и символ Леви-Чивиты (эпсилон-символ).

Символ Кронекера уже определен выше (см. Определение 42). Покажем, что δ_{ij} является тензором второго ранга. Пусть задана матрица перехода от одного ортонрмированного базиса к другому α_{lk}. Для нее выполняется соотношение $\alpha^T = \alpha^{-1}$. Убедимся, что при переходе к новой системе координат символ Кронекера переходит сам в себя.

$$\alpha_{ik}\alpha_{jl}\delta_{kl} = \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \alpha_{ik}\alpha^T_{kj} = \delta_{ij}.$$

Этот тензор является симметричным тензором второго ранга.

Определение 46 Символом Леви-Чивиты *называется тензор третьего ранга ε_{ijk}, заданный следующим образом:*

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{333} = 0,$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1.$$

Нетрудно видеть, что символ Леви-Чивиты является антисимметричным тензором третьего ранга.

С помощью символа Леви-Чивиты можно следующим образом записать определение правой тройки ортонормированных векторов:

$$(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}, \mathbf{e_k}) = \varepsilon_{ijk}.$$

Определитель матрицы $A = (a_{ij})$ третьего порядка можно следующим образом записать с использованием эпсилон-символа Леви-Чивита:

$$\det A = \varepsilon_{ijk}\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}.$$

Глава 4

Приложение

4.1 Дифференциальные операции векторного анализа

Оператор набла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам. В прямоугольной декартовой системе координат оператор набла определяется следующим образом:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Оператор набла удобно рассматривать как символический вектор, использовние которого позволяет определить стандартные дифференциальные операторы векторного анализа в более компактной форме.

Мы ввели три различных дифференциальных оператора над полями:

- градиент скалярного поля: $\operatorname{grad} u = \nabla\, u$
- дивергенция векторного поля: $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$;
- ротор векторного поля: $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$.

Различные формулы с использованием оператора Гамильтона

Пусть заданы скалярные поля ϕ и ψ и векторные поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Верны следующие формулы:

1. $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$;
2. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$;
3. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$;

4. $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$;

5. $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi(\nabla \times \mathbf{A})$;

6. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla^2 \mathbf{A})$;

7. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$;

8. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$;

9. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$;

10. $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.

4.2 Дифференциальные операции векторного анализа в ортогональных системах координат

1. Криволинейные ортогональные координаты в пространстве.

- Пусть q_1, q_2, q_3 — криволинейные координаты, заданные гладкими функциями от x, y, z:

$$\begin{cases} x = \varphi_1\left(q_1,\ q_2,\ q_3\right); \\ y = \varphi_2\left(q_1,\ q_2,\ q_3\right); \\ z = \varphi_3\left(q_1,\ q_2,\ q_3\right), \end{cases}$$

- Локальный базис:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right);\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

- Коэффициенты Ламэ:

$$H_i = |\mathbf{e}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right)^2};\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

- Градиент в ортогональной системе координат:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{e}_3.$$

- Дивергенция в ортогональной системе координат:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 H_1 H_2)\right].$$

- Ротор в ортогональной системе координат:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_3}\right]\mathbf{e_1} +$$

$$+\frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_1}\right]\mathbf{e_2} + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2}\right]\mathbf{e_3} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{H_2H_3}\mathbf{e}_1 & \dfrac{1}{H_1H_3}\mathbf{e}_2 & \dfrac{1}{H_1H_2}\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1H_1 & A_2H_2 & A_3H_3 \end{pmatrix}.$$

2. Цилиндрическая система координат.

- Связь цилиндрической и декартовой с.к.:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), \\ z = z. \end{cases}$$

- Коэффициенты Ламэ:

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1.$$

- Градиент в цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

- Дивергенция в цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

- Ротор в цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{pmatrix}.$$

3. **Сферическая система координат. Внимание!** В некоторых учебниках используются сферические координаты, отличные от приведенных ниже. Мы используем угол θ, значение которого соответствует величине угла между осью Z и отрезком, соединяющим начало координат и точку M. Такой угол называется зенитным (отклонение от зенита). В некоторых источниках вместо него может использоваться угол $\pi/2 - \theta$, такой угол называется широтой.

   - Связь сферической и декартовой с.к.:
   $$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$
   $$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right), \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{cases}$$
   - Коэффициенты Ламэ:
   $$H_\rho = 1, \quad H_\theta = \rho, \quad H_\varphi = \rho\sin\theta.$$
   - Градиент в сферической системе координат:
   $$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial q_\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$
   - Дивергенция в сферической системе координат:
   $$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$
   - Ротор в сферической системе координат:
   $$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho^2\sin\theta}\mathbf{e}_\rho & \dfrac{1}{\rho^2\sin\theta}\mathbf{e}_\theta & \dfrac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_\rho & \rho A_\theta & \rho\sin\theta A_\varphi \end{pmatrix}.$$

Предметный указатель